2010 年度博士論文要旨

Locally nilpotent module derivations

関西学院大学大学院理工学研究科
物理学専攻　増田研究室　田中 幹也

研究背景・論文概要

3 次元以上の高次元アフィン代数多様体の場合には射影多様体の場合に比べて理論の整備が十分ではない．それを補うためにアフィン多様体へ代数群の作用を考えて，商多様体など低次元のものに持ち込んで議論することが行われてきた．その具体的な事例の一つとして，加法群スキーム G_a の作用が挙げられる．G_a のアフィンスキーム $\mathrm{Spec}\,B$ 上への作用を与えることと座標環 B 上に局所べき零導分 δ を与えることが同値であることはよく知られた事実である．このとき，G_a-不変環 A は $\mathrm{Ker}\,\delta$ で与えられ，商射 $\pi : \mathrm{Spec}\,B \to \mathrm{Spec}\,A$ は包含写像 $A \to B$ で与えられる．G_a の作用はこのような単純な構造を持っているにもかかわらず，既存の代数幾何学の枠にとらわれない性質を持っている．例えば，B は有限生成代数でも，Hilbert の第 14 問題の反例が示すように，A は有限生成とは限らない．また，商射 π は全射とは限らない．

このような状況から，局所べき零導分の性質を詳しく調べることは有益であると思われるが，完全な理論には至っていない．従来は，環上の局所べき零導分の研究が中心になされてきたが，それを加群にまで拡張したものを導入することで，局所べき零導分の性質をより深く調べられるのではないかというのが本論文のテーマである「加群上の局所べき零導分」を研究する意義である．

k を標数 0 の体とし，B を k-代数とする．k-線形写像 $\delta : B \to B$ が次の 2 つの条件を満たすとき，δ を局所べき零導分という．

(1) B の任意の元 b_1, b_2 に対して，$\delta(b_1 b_2) = \delta(b_1)b_2 + b_1\delta(b_2)$.
(2) B の任意の元 b に対して b によって定まる自然数 N が存在して，$\delta^N(b) = 0$.

B 上の 0 でない局所べき零導分 δ を一つ固定する．M を B-加群とする．k-線形写像 $\delta_M : M \to M$ が次の 2 つの条件を満たすとき，δ_M を局所べき零加群導分という．

(3) B の各元 b と M の各元 m に対して，$\delta_M(bm) = \delta(b)m + b\delta_M(m)$.
(4) M の各元 m に対して，m によって定まる自然数 N が存在して，${\delta_M}^N(m) = 0$.

このような局所べき零加群導分が与えられた B-加群を δ-加群と呼ぶ．以下，M を δ-加群とする．$A := \mathrm{Ker}\,\delta$ は B の部分環で，$M_0 := \mathrm{Ker}\,\delta_M$ は M の A-部分加群である．このとき，次の 2 つの問題が考えられる．

(P1) M は B-加群として M_0 によって生成されるか．
(P2) B が有限生成 k-整域，M が有限生成 B-加群であるとき，M_0 は有限生成 A-加群であるか．

特に，(P2) は Hilbert の第 14 問題を加群の場合に拡張して考えたものである．(P1) と (P2) はともに肯定的結果をもつ場合と反例が存在する場合に分かれる．

Hilbert の第 14 問題の反例の構成については永田の反例 (1959) 以来，数多くの反例が提示されている．本論文では，

(i) (B, δ) が Hilbert の第 14 問題に対する反例ならば，その特別な場合に，B の微分加群 $\Omega_{B/k}$ は (P2) の反例を与えること，
(ii) B-加群 M が (P2) の反例ならば対称テンソル代数 $S_B^\bullet(M)$ は Hilbert の第 14 問題の反例になること

を示している．

Hilbert の第 14 問題の反例の構成にあたっては，反例の次元を下げること，G_a-不変環 A を生成する無限個の生成元の具体的な構成が問題であるが，黒田の反例を含むいくつかの反例において，無限個の生成元の構成方法を見直し，議論の簡約化を図った．

各章の要旨

本論文は 5 章から成る．第 1 章では，局所べき零導分を研究する意義を述べ，従来研究されてきた環上の局所べき零導分を加群上に拡張する意義を述べている．そして，加群上の局所べき零導分の主要な問題とそれに対する部分的解答の要約及び論文全体の構成を述べている．

第 2 章では，局所べき零加群導分の様々な性質をまとめている．局所べき零加群導分はこれまで研究されてこなかったので、基礎となる理論を構成する必要がある．環上の局所べき零導分の持つ基本的性質と似たものが加群上の局所べき零導分でも成り立ち，それをまとめたものが第 2.2 節である．ここでは，(P1) と (P2) の部分的解答も与えている．第 2.3 節では，B が 2 変数多項式環もしくはもう少し一般化した A 上の 1 変数多項式環のときの δ-加群の性質を調べている．第 2.4 節では，δ-加群のホモロジー的な性質の一部を与えている．δ-加群と環の関係を調べることの一つとして，δ と δ_M の関係を書いたものが第 2.5 節である．B が次元 2 の有限生成 $\mathbb{C}$-整域であるときの B-加群 M の構造定理を述べたのが第 2.6 節である．第 2.7 節では，幾何的な性質と δ-加群の性質の関係性を示唆する例を与えている．

第 3 章では，(P2) に関して詳しく調べている．有限生成となるためのいくつかの十分条件を与えたのが第 3.1 節である．ここには次の結果が含まれる．

(i) M が B-加群としてねじれをもつときは，簡単に反例が作れる．
(ii) M がねじれのない B-加群で，A がネーター整域であるときは，M_0 は A 上有限生成である．(したがって，Zariski の結果により，$\dim B \leq 3$ のときには，M_0 は A 上有限生成となる．)
(iii) M_0 が射影的 A-加群であるならば，M_0 は A 上有限生成である．

したがって，M が B 上ねじれがないとき，(P2) の反例を構成するには，A が k 上無限生成でかつ M_0 が A 上射影的でない必要がある．(P2) と Hilbert の第 14 問題の関係に注目したのが第 3.2 節と 3.3 節である．第 3.3 節では，微分加群 $\Omega_{B/k}$ 上の局所べき零加群導分について論じている．微分加群及び Roberts らの反例を用いることで，(P2) の反例が構成できる．(P2) に対して，$\dim B \geq 5$ のときは反例が得られたが，$\dim B = 4$ のときはまだ見つかっていない．第 3.2 節では，(P2) と Hilbert の第 14 問題の関係について述べている．B が多項式環で M が自由 B-加群のときを考える．δ_M は自然に対称テンソル代数 $R := S_B^\bullet(M)$ 上の局所べき零導分 δ_R に拡張できる．このとき次の 2 つの結果が得られた．

(i) δ_M が (P2) の反例を与えるとき，δ_R は Hilbert の第 14 問題の反例を与える．
(ii) δ_R が Hilbert の第 14 問題の反例を与えるからといって，δ_M が (P2) の反例を与えるとは限らない．(B が 8 変数以上の多項式環で反例が存在する．)

(i) を使えば，第 3.3 節で挙げる (P2) の反例 $M := \Omega_{B/k}$ が Hilbert の第 14 問題の反例 $R := S_B^\bullet(M)$ を与えることがわかる．さらに，$\Omega_{R/k}$ も (P2) の反例を与えているそして，$S_R^\bullet(\Omega_{R/k})$ は Hilbert の第 14 問題の反例を与える．この操作は何度でも続けることができる．

第 4 章では Hilbert の第 14 問題の反例となる局所べき零導分の核の生成元の直接的な構成方法を述べている．特に，この構成方法を使えば，黒田の反例に対してより精密な形で生成元を与えることができ，新たな (P2) の反例を与えることができる．

第 5 章では，テンソル積や双対加群に対する δ-加群のホモロジー論からの問題提示と問題を考える上で参考になる例をいくつか挙げている．これらは，今後の局所べき零加群導分の研究を進める上での課題としている．